

Esercizio n.1

Un filo di materiale isolante è costituito da due tratti rettilinei di lunghezza L connessi ad una circonferenza di raggio R (vedi figura).

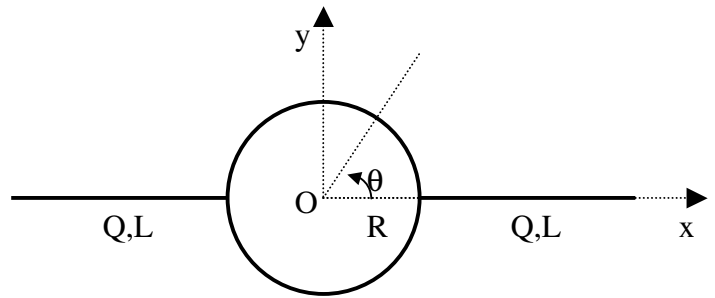
Su ciascuno dei tratti rettilinei è uniformemente distribuita una carica Q . La circonferenza invece possiede carica con densità lineare $\lambda = k \cos \theta$.

Calcolare

- La carica totale posseduta dal filo
- Il potenziale generato dal filo nel punto O
- Il campo elettrico generato dal filo nel punto O

Valori numerici: $Q=10^{-8}\text{C}$, $k=10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}}$, $R=20\text{cm}$, $L=50\text{cm}$,

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$



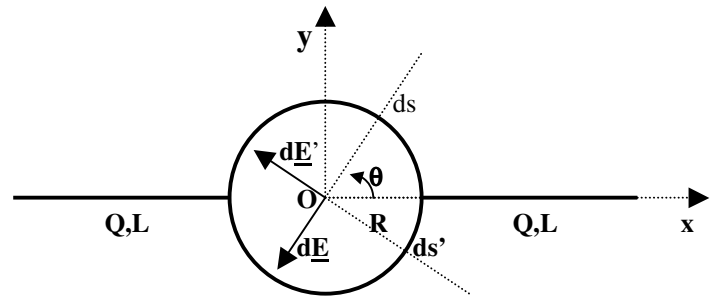
Soluzione

La carica totale sulla circonferenza è nulla, infatti

$$Q_{\text{circ}} = \int_0^{2\pi R} \lambda ds = \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta = Rk \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = Rk \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Quindi la carica totale posseduta dal filo vale $2Q=2 \cdot 10^{-8}\text{C}$.

Il potenziale nel punto O può essere calcolato come la somma del potenziale dovuto alla carica dei due fili rettilinei più quello della carica sulla circonferenza:



$$V(P) = V_{\text{filo}} + V_{\text{filo}} + V_{\text{circ}} = 2 \int_R^{R+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{\text{filo}} dx}{x} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{\text{circ}} ds}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} + \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} + \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln \frac{R+L}{R} = 450,81\text{V}$$

Nel punto P , i campi delle cariche dei due fili rettilinei sono vettori uguali in modulo e in direzione ed opposti in verso, quindi i due fili rettilinei non contribuiscono al campo.

Nel primo e nel quarto quadrante il filo è carico positivamente; nel secondo e nel terzo quadrante invece la carica è negativa. Considerando ad esempio il campo dovuto alla carica su di un elemento infinitesimo di filo nel primo quadrante ed il campo della carica sull' elemento infinitesimo ad esso simmetrico (rispetto all' asse x) nel quarto quadrante, è facile vedere che il campo elettrico nel punto P è diretto come l' asse x ed ha modulo:

$$E_x(P) = E_{x,\text{filo}} + E_{x,\text{filo}} + E_{x,\text{circ}} = - \int_0^{2\pi R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_{\text{circ}} ds \cos \theta}{R^2} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k}{R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k}{R} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta =$$
$$- \frac{k}{4\epsilon_0 R} = -1,41 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

dove il segno $-$ indica che il campo ha verso opposto a quello dell' asse x .

